**Lógica – Algorítmos e Programação de Computadores**

**- Módulo II**

Valmir Santana

**Caderno de Anotações**

**-Agosto/2020**

**Lógica Quantitativa Demonstração e Indução**

**Lógica de Predicados ou Lógica de primeira ordem**

## **Predicado**

Predicados ou lógica de primeira ordem, contem uma linguagem mais rica do que a lógica das proposições, pois além de conter elementos do calculo de proposições expande suas possibilidades por explorarem o uso dos *quantificadores*.

Observe os exemplos a seguir que mostram argumentos válidos, como já vistos, mas que não é possível justificá-los somente com o uso dos conectivos:

* P1: Todo homem é um ser racional.
* P2: Carlos é um homem.
* C: Logo, Carlos é um ser racional
* Q1Q1: Todo vascaíno é feliz.
* Q2Q2: Algumas pessoas são vascaínas.
* C: Algumas pessoas são felizes.

Analisando os dois exemplos acima verificamos que a validade desses argumentos depende não somente dos conetivos, mas do significado das expressões “todo” e “alguns”.

## **Quantificadores**

Quantificadores são símbolos que representam uma ***quantidade*** de elementos. Eles têm função de informar sobre determinada quantidade de elementos de uma situação qualquer. Quantidade essa que não pode ser definida pelos conectivos que já conhecemos (“E”; “OU”; “OU...OU”; “SE, ENTÃO” e “SE E SOMENTE SE”). Em nosso estudo a cerca dos quantificadores centraremos nossa atenção nos:

* **Quantificador universal** que é usado quando desejamos nos referir a todos os elementos de um dado conjunto. Palavras como: Todo, para todo, são quantificadores universais.
* **Quantificador existencial ou particular** faz referencia a existência de pelo menos um elemento pertencente a um dado conjunto e não a todos os elementos de um conjunto. Palavras como: algum, pelo menos um, são quantificadores existenciais.

Importante!  
Cuidado com o quantificador pelo menos um. Ele quer significar no mínimo um elemento do conjunto considerado e não necessariamente um.

Ainda sobre os quantificadores vales destacar algumas de suas propriedades:

* **Todo P é Q**, entende-se que  P⊂Q  (P está contido em Q ou P é subconjunto de Q).

**Algum A é B** entende-se como uma interseção ente A e B.

**Nenhum C é D** caracteriza dois conjuntos disjuntos não havendo interseção.

**Representação Simbólica**

Para tornar a estrutura de sentenças complexas mais simples de se manipular e de se entender apresentaremos os novos símbolos que darão corpo à linguagem da lógica de predicados ou lógica de primeira ordem que facilitarão sua compreensão, ressalvando que todos os conectivos do calculo de preposições continuam válidos.

* **Variáveis** (x, y, z,...): Indicadas por letras minúsculas elas estabelecem fatos sobre os objetos, sem nomeá-los diretamente. As variáveis não são proposições simples apenas serão quando seguidas de um quantificador.
* **Quantificadores**: Quantificador universal [**∀** (lê-se para todo)] e quantificador existencial [ **∃** (lê-se existe, existe pelo menos um)].
* **Predicados**: Indicadas por letras maiúsculas os predicados trazem uma propriedade ou relação entre dois objetos num determinado universo.

Veja algumas formar de usar essa simbologia:

Quando tivermos a informação P(x) isso significará para nós que x tem a propriedade P.  
Quando tivermos (∀x)P(x) isso significará para nós que a propriedade P vale para todo x, sem exceção.  
Quando tivermos isso significará para nós que algum x tem a propriedade P, ou ainda, que existe no mínimo um objeto do Universo considerado que tem a propriedade P.

Exemplos: Escreva em linguagem simbólica as premissas e as conclusões abaixo:

**a - Todo amigo de Carlos é amigo de Jonas.  
Pedro não é amigo de Jonas.  
Logo, Pedro não é amigo de Carlos.**

Em linguagem simbólica temos:

P1:(∀x)(P(x,c)P(x,j)): Nesta fórmula x (todo) é a variável P(x,c) indica uma relação entre os amigos e Carlos e P(x,j) indica uma relação entre os amigos e Jonas. O ∀x é o quantificador lógico. Como visto nas propriedades dos quantificadores este quantificador leva a uma implicação.

P2: ~ P(p,j): Esta formula nos indica que não há amizade entre Pedro e Jonas.

Assim:

P1: (∀x) (P(x,c)   P(x,j)  
P2: ~P(p,j)

C: P(p,c) - Logo, Pedro não é amigo de Carlos.

Seja uma condição P(x), um quantificador tem a capacidade de transformar algo incerto como P(x) (impossível de ser valorada) numa sentença fechada, ou seja, numa proposição. Assim se antepormos à P(x) um quantificador do tipo ∃∃ ou $∀∀ será possível afirmar se P(x) é verdadeiro (V) ou falso (F).

Para entendermos melhor esse conceito considere o conjunto A = {5, 7, 8, 9, 11, 13}. A partir de A podemos dizer que:

* ***Qualquer que seja*** o elemento de A, ele é um número natural;
* ***Existe*** elemento de A que é número ímpar;
* ***Existe um único*** elemento de A que é par;
* ***Não existe*** elemento em A que seja múltiplo de 6.

Os quantificadores representaram expressões tais como: “qualquer que seja”, “existe”, “existe um único”, “não existe”, alem de “todo”, “nenhum”, “algum”, dentre outros.

Fundamentalmente há dois tipos de quantificadores: os existenciais(particulares) e os universais.

**Negação de Proposições com Quantificador**

Vimos como negar proposições compostas com seus respectivos conectivos. Agora vamos abordar o modo como uma proposição com quantificador pode ser negada.

Seja a proposição:

**P: “Todo físico é louco”.**

Dizer que a negação desta proposição é: “Todo físico não é louco” ou “nenhum físico é louco” é um erro comum para os iniciantes no estudo da lógica.

Para se negar o quantificador “todo” que implica que todos os elementos do conjunto considerado estão incluídos na análise do argumento, basta que pelo menos um elemento deste conjunto não esteja incluído, sendo assim necessariamente não seria preciso que nenhum estivesse incluído, mas pelo menos um.

Desta forma vale para a negação dos modificadores universais a equivalência:

∼(∀x)(p) ⇔ (∃x)(∼p) ► Lê-se ***“A negação de ‘Todo x é P é equivalente a Existe x que não é P”***. Resumindo ou simplificando podemos também dizer que ‘Algum x é P’.

**A negação de “todo x tem a propriedade p” é equivalente a “existe pelo menos um x que não possui a propriedade p” ou “nem todo x tem a propriedade p”.**

**Exemplo 1**

Negue a seguinte afirmação:

“Todos os alunos deste colégio são inteligentes”

**Resposta:** “Pelo menos um dos alunos deste colégio não é inteligente” ou “Nem todos os alunos deste colégio são inteligentes”.

Seja agora a proposição:

Q: “Alguns filósofos são ateus”.

Mais uma vez seria um erro afirmar que a negação de Q seria: “alguns filósofos não são ateus”. A negação correta de Q é: “Nenhum filósofo é ateu” ou “Todo filósofo não é ateu”.

Desta forma vale para a negação dos modificadores existenciais a equivalência:

∼ (∃x)(p)⇔(∀x)(∼p) ► Lê-se ***“A negação de ‘Existe x que é P é equivalente a Todo x não é P”***. Resumindo ou simplificando podemos também dizer que ‘Nenhum x é P’.

**A negação de “existe pelo menos um x que tem a propriedade p” é equivalente a “todo x não possui a propriedade  p” ou “não existe (nenhum) x que tem a propriedade p”.**

**Definições:**

Chamamos de definição um ***enunciado que descreve o significado de um termo de forma imutável e incontestável***. Se no mundo das palavras os termos podem ser unívocos (um só significado), equívocos (ter dois ou mais significados diferentes) e análogos (termos com significados semelhantes), no estudo da lógica matemática prima-se pela clareza e precisão dos termos, uma vez que essa clareza e precisão será a base para se realizar uma demonstração irrefutável.

**Exemplos:**

a - Significado de linha, segundo Euclides: “Linha é o que tem comprimento e não tem largura”.

b - Significado de átomo: “Unidade básica da matéria”.

c - Significado de número: “Objeto matemático que representa uma quantidade”.

**Axiomas:**

Chamamos de axioma, também chamado de postulado a uma ***sentença que é assumida como verdadeira e universalmente inquestionável sem que haja necessidade de se provar sua veracidade***, já que um axioma é uma proposição tida por óbvia. Os postulados são muitas vezes utilizados na construção de uma teoria ou como o ponto de partida para deduções e inferências.

**Exemplos:**

a - Pode-se traçar uma única linha reta entre dois pontos distintos.

b - Todos os ângulos retos são iguais.

c - Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio

d - Para todo natural x, x = x.

e - Para todos os números naturais *x*, *y*, e *z*, se *x* = *y* e *y* = *z*, então *x* = *z*.

**Teoremas:**

Chamamos de teorema a uma ***afirmação que não é obvia, mas que precisa ser provada***, utilizando-se para isso outros teoremas já provados, bem como alguns axiomas. Esse termo foi elaborado por Euclides, filósofo grego que viveu no século III a.C, e significa exatamente afirmação que pode ser provada.

Exemplos:

a - Teorema de Pitágoras. (a2 = b2 + c2)

**Conjecturas:**

Chamamos de conjecturas a uma ***proposição que não foi provada nem refutada***, por isso ***toda conjectura é uma hipótese que se assume verdadeira***, mas que precisa de demonstração.

**Exemplos:**

a - Conjectura dos primos gêmeos. (Esta conjectura diz que existem infinitos números primos gêmeos.)

Um par de primos é chamado de primos gêmeos se eles são dois números primos “p” e “q” tais que q = p + 2. (Exemplos: 5 e 7, 17 e 19).

b - Conjectura de Goldbach (Essa conjectura diz que todo numero par maior ou igual a 4 é resultado da soma de dois números primos como nos casos: 4 = 2 + 2, 10 = 5 + 5, 21 = 19 + 2, etc.)

Um número primo é aquele que no conjunto dos números naturais admite apenas dois divisores, o número 1 e ele mesmo.

**Raciocínio Indutivo:**

Raciocínio indutivo é um tipo de raciocínio que assume o futuro como repetição de algo que ocorreu no passado. Esse método descreve em geral um tipo de raciocínio que tem em comum o fato de não garantirem a veracidade das conclusões obtidas.

**Exemplo.**

P1P1: O pato branco faz qua, qua.

P2P2: O pato preto também faz qua, qua.

C: Logo, todos os patos fazem qua, qua.

**Raciocínio Dedutivo:**

O raciocínio dedutivo, é um modo de raciocinar cuja seqüência de premissas conduz de forma segura a uma verdade pura, assim partindo de algumas verdades anteriores temos a certeza de chegar a uma conclusão verdadeira.